EJERCITACION

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio n° 1:

Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}7 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 5 & -6\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$

Analice si cada una de ellas es:

a) Simétrica
b) Singular
c) Dominante diagonalmente (especifique si lo es en sentido estricto)

Ejercicio n° 2:

Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$

Calcule:

a) Los autovalores
b) El radio espectral
c) Las normas $\|A\|_2$ y $\|B\|_2$

Ejercicio n° 3:

Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}5 & -5 & -7\\ -4 & 2 & -4\\ 7 & -4 & 5\end{bmatrix}$ Halle las normas $\|A\|_1$ y $\|A\|_\infty$

Ejercicio n° 4:

Dadas las matrices: A = $\begin{pmatrix}2k-3 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 4 & 10-k\end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix}3k-3 & 4 & -1\\ 2 & 5+k^2 & -2\\ 7 & 4 & 10-k\end{pmatrix}$

a) Indique los valores de k $\in$ R tal que sean diagonalmente dominantes.

b) ¿Para que valores de k $\in$ R, son estrictamente diagonal dominantes?

METODOS ITERATIVOS:

Ejercicio n° 5:

Aplique el método iterativo de Jacobi para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

realizando los cálculos con tres decimales redondeados e iterando hasta que cumpla que:

$$\left\| x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} \right\|_\infty < 0{,}03$$

Ejercicio n° 6:

Resuelva el sistema anterior usando el método de Gauss Seidel. Halle las T_J y T_{GS}

Ejercicio n° 7:

Sea el S.E.L.: $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

a) Indique si los métodos iterativos convergen. Justifique.
b) Realice cinco iteraciones por el método de Gauss-Seidel con F(4, 10, 34, 56) y redondeo simétrico partiendo de $X^0 = (0 ; 0)$.
c) Idem b) pero partiendo de $X^0 = (9 , 5)$. Compare.

Ejercicio n° 8:

Sea el sistema de ecuaciones lineales: A • X = B con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$

a) ¿Los métodos iterativos convergen? Justifique.

b) Resuelva por el método de Jacobi partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y haciendo seis iteraciones.

c) Resuelva por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y haciendo seis iteraciones.

d) Compare la velocidad de convergencia de ambos, sabiendo que la solución exacta es: (3 , 2)

Ejercicio n° 9:

Aplique el método iterativo de Gauss Seidel para encontrar una solución aproximada de los siguientes sistemas, iterando hasta que cumpla con $\left\| x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} \right\|_\infty < 0{,}1.10^{-2}$

a) $\begin{cases} -x_2 + 6x_3 = -40 \\ 8x_1 - 5x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 5 \\ 5x_4 = 2{,}5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -3 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

Ejercicio n° 10:

Aplique el método de Jacobi para resolver el sistema: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ comenzando con la aproximación inicial (1,01;1,01) . Halle la T_J

Ejercicio n° 11:

Aplique el método de Jacobi para resolver los siguientes sistemas, iterando hasta que cumpla con $\left\| x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} \right\|_\infty < 0{,}01$ y trabajando con 3 decimales a redondeo simétrico

a) $\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 21 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 30 \end{cases}$

Ejercicio n° 12:

Sea el sistema A • X = B con $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 29 \\ 79 \end{pmatrix}$

a) Indique si la matriz es diagonal dominante. ¿Puede asegurarse que sea posible resolverlo por el método de Gauss Seidel?

b) Realice 100 iteraciones por Gauss Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. ¿Converge a la solución que es (3;2)?

c) Analice si el resultado anterior contradice o no al teorema.

RESPUESTAS T.P. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) *a) La única simétrica es la C.*

b) Ninguna es singular pues det(A) = 5 ≠ 0 det(B) = -139 ≠ 0 y det(C) = 6 ≠ 0

c) A y B son Estrictamente dominantes diagonalmente.

2) *a) Autovalores de A:* $\lambda_1=1$ $\lambda_2 = 3$; *Autovalores de B:* $\lambda_1=1$ $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = -5$

b) Radio espectral de A: 3 *Radio espectral de B: 5*

c) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{9} = 3$ $\quad \|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^t B)} = \sqrt{25} = 5$

3) $\|A\|_1 = 16$ *y* $\|A\|_\infty = 17$

4) *a) Para que A sea diagonal dominante, k debe ser pertenecer a (- ∞ ; -1] U { 4 } U [16 ; +∞) .*

Para que B sea diagonal dominante, k debe ser pertenecer a (- ∞ ; -1] U [21 ; +∞) .

b) Para que A sea estrictamente diagonal dominante, k debe pertenecer a (- ∞ ; -1) U (16 ; +∞).

Para que B sea estrictamente diagonal dominante, k debe pertenecer a (- ∞ ; -1) U (21 ; +∞).

5) *Por Jacobi*

X	Y	Z
0	0	0
1,14285714	0,5	-0,5
1,5	0,80357143	0,3452381
1,06037415	1,14880952	0,63392857
0,94472789	1,05612245	0,39838435
1,06608358	0,95386905	0,305839
1,10435901	0,97624109	0,36970056
1,07106269	1,00655977	0,39894619
1,05868215	1,00138506	0,38180176

6) *Por Gauss-Seidel*

X	Y	Z
0	0	0
1,14285714	0,92857143	0,41666667
1,03741497	0,99319728	0,35714286
1,08066084	0,99453353	0,38619615
1,06424985	0,99564273	0,37544035

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & -4/7 \\ 3/8 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & -4/7 \\ 0 & 3/56 & 1/28 \\ 0 & 35/336 & -3/8 \end{pmatrix}$$

7) *a) Sí, convergen pues la matriz es diagonalmente dominante*

b) Al resolverlo por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (0;0)$ *se obtiene:*

$X^1 = (0.25 , 0.5833)$ $X^2 = (0.3958 , 0.5347)$ $X^3 = (0.3837 , 0.5388)$

$X^4 = (0.3847 , 0.5384)$ $X^5 = (0.3846 , 0.5385)$

c) Al resolverlo por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (9 , 5)$ *se obtiene:*

$X^1 = (1.5 , 0.1667)$ $X^2 = (0.2917 , 0.5694)$ $X^3 = (0.3924 , 0.5359)$

$X^4 = (0.3840 , 0.5387)$ $X^5 = (0.3847 , 0.5384)$

Vemos que igualmente converge, solamente una iteración más.

8) *a) Sí, convergen pues la matriz es diagonalmente dominante*

b) Al resolverlo por el método de Jacobi partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *se obtiene:*

$X^1 = (2 , 3)$ $X^2 = (2.5 , 2.5)$ $X^3 = (2.75 , 2.25)$

$X^4 = (2.875 , 2.125)$ $X^5 = (2.9375, 2.0625)$ $X^6 = (2.96875 , 2.03125)$

c) Al resolverlo por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *se obtiene:*

$X^1 = (2 , 2.5)$ $X^2 = (2.75 , 2.125)$ $X^3 = (2.9375 , 2.03125)$

$X^4 = (2.984375 , 2.0078125)$ $X^5 = (2.99609375, 2.001953125)$

$X^6 = (2,999023438 , 2,000488281)$

d) Se puede apreciar la mayor velocidad de convergencia de Gauss-Seidel.

10) *Primero se intercambian las filas para que sea convergente.*

x_1	x_2
1,01	1,01
0,99666667	0,995
1,00166667	1,00166667
0,99944444	0,99916667
1,00027778	1,00027778
0,99990741	0,99986111
1,0000463	1,0000463
0,99998457	0,99997685
1,00000772	1,00000772

x_1	x_2
0,99999743	0,99999614
1,00000129	1,00000129
0,99999957	0,99999936
1,00000021	1,00000021
0,99999993	0,99999989
1,00000004	1,00000004
0,99999999	0,99999998
1,00000001	1,00000001
1	1

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

12) *a) La matriz no es diagonal dominante, con lo cual no podemos asegurar que G-S converja.*

b) Realizando 100 iteraciones se ve que converge a la solución exacta que es (3;2)

c) No contradice el teorema pues es solo condición suficiente.

Sistemas de Ecuaciones lineales

Mat. Sup

① Dados las matrices A, B y C, analice si cada una de ellas es

a) Simétrica
b) Singular
c) Dominante diagonalmente (especifique si lo es en sentido estricto)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Simétrica ($C = C^t$)

b) $\det(A) = 5 \neq 0$ (no es singular) $\qquad \det(B) = -139 \neq 0$ (no es singular) $\qquad \det(C) = 6 \neq 0$ (no es singular)

c)

$|-2| > |1|$ ✓
$|-3| > |1|$ ✓

Es dominante diag. estricta ✓

$|7| > |2| + |0|$ ✓
$|5| > |3| + |-1|$ ✓
$|-6| > |0| + |5|$ ✓

es dominante triang. estricta

$|2| > |-1| + |0|$
$|4| > |-1| + |2|$
$|2| \geqslant |0| + |2|$

es domin. triangular pero no estrictamente ✓

---

② Dados las matrices A y B:
Calcule:
a) los autovalores
b) El radio espectral
c) Las normas $\|A\|_2$ y $\|B\|_2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ a) $\det(A - \lambda I) = 0 \to (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \to \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1\end{matrix}}$ ✓

b) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \to \boxed{\rho(A) = 3}$ ✓

c) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t . A)} \longrightarrow A^t . A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = A'$

$\det(A' - \lambda I) = (5-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + \overset{9}{\overbrace{25 - 16}} = 0 \to \left.\begin{matrix}\lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1\end{matrix}\right\} \rho(A^t . A) = 9 \to \boxed{\|A\|_2 = 3}$ ✓

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to$ a) $\det(B - \lambda I) = (-5-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (-5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$

$= (-\lambda - 5)(\lambda - 3)(\lambda - 1) \to \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 1\end{matrix}}$ ✓

b) $\rho(B) = \max(|\lambda_i|) = \boxed{5 = \rho(B)}$ ✓

c) $\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^t . B)}$

$B^t B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = B' \to \det(B' - \lambda I) = (25 - \lambda)\left[(\lambda - 5)^2 - 16\right] = (25 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 25 - 16) =$

$= (25 - \lambda)(\lambda - 9)(\lambda - 1) \to \rho(B') = 25 \longrightarrow \boxed{\|B\|_2 = 5}$ ✓

③ Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ halle las normas $\|A\|_1$ y $\|A\|_\infty$
$\sum$ col. $\quad \sum$ filas

$$\|A\|_1 : \left.\begin{array}{l} |5| + |-4| + |7| = 16 \\ |-5| + |2| + |-4| = 11 \\ |-7| + |-4| + |5| = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\|A\|_1 = 16}$$

$$\|A\|_\infty : \left.\begin{array}{l} |5| + |-5| + |-7| = 17 \\ |-4| + |2| + |-4| = 10 \\ |7| + |-4| + |5| = 16 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\|A\|_\infty = 17}$$

---

④ Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2k-3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 10-k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3k-3 & 4 & -1 \\ 2 & 5+k^2 & -2 \\ 7 & 4 & 10-k \end{pmatrix}$

a) Indique los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que sean diagonalmente dominantes

Para que sea una matriz diagonalmente dominante $\Rightarrow |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}|$

$\boxed{A}$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} |2k-3| \geq 4+1 \\ 5 \geq 2+2 \ \checkmark \\ |10-k| \geq 2+4 \end{array}\right\}$ $|2k-3| \geq 5 \quad \wedge \quad |10-k| \geq 6$

$(-2k+3 \geq 5 \ \vee \ 2k-3 \geq 5) \ \wedge \ (-10+k \geq 6 \ \vee \ 10-k \geq 6)$

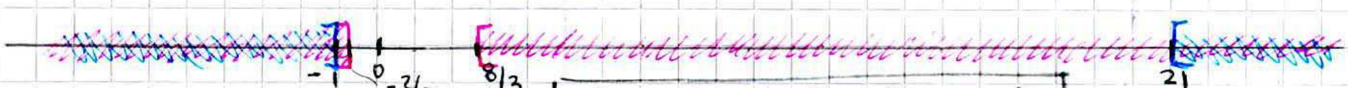
$(\underbrace{k \leq -1 \ \vee \ k \geq 4}) \ \wedge \ (\underbrace{k \geq 16 \ \vee \ k \leq 4})$

$\boxed{k \in (-\infty, -1] \cup \{4\} \cup [16, +\infty)}$ ✓

$\boxed{B}$ $\rightarrow |3k-3| \geq \overbrace{4+|-1|}^{5} \ \wedge \ |5+k^2| \geq \overbrace{|2|+|-2|}^{4} \ \wedge \ |10-k| \geq \overbrace{7+4}^{11}$

$(3k-3 \geq 5 \ \vee \ -3k+3 \geq 5) \ \wedge \ (5+k^2 \geq 4) \ \wedge \ (10-k \geq 11 \ \vee \ -10+k \geq 11)$

$(\underbrace{k \geq 8/3 \ \vee \ k \leq -2/3}) \ \wedge \ (\underbrace{k^2 \geq -1}_{\text{cumple } \forall k \in \mathbb{R}}) \ \wedge \ (\underbrace{k \leq -1 \ \vee \ k \geq 21})$



$\boxed{k \in (-\infty, -1] \cup [21, +\infty)}$ ✓

b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ son estrictamente diagonal dominantes?

$\boxed{A}$: $k \in (-\infty, -1) \cup (16, +\infty)$ ✓

$\boxed{B}$: $k \in (-\infty, -1) \cup (21, +\infty)$ ✓

MÉTODOS ITERATIVOS

⑤ Aplique el método iterativo de Jacobi para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

realizando los cálculos con tres decimales redondeados e iterando hasta que cumpla que:

$$\| x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} \|_\infty < 0,03$$

$$\left\{ x_1 = \frac{8 + x_2 - 4x_3}{7} \; ; \; x_2 = \frac{4 + 3x_1 + 2x_3}{8} \; ; \; x_3 = \frac{-3 + 4x_1 + x_2}{6} \right.$$

$x_{(0)} = (0\,;\; 0\,;\; 0)$

$x_{(1)} = (1.143\,;\; 0.5\,;\; -0,5) \to \| x_{(1)} - x_{(0)} \|_\infty = (1,143,\, 0,5,\, 0.5) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(2)} = (1.5\,;\; 0,804\,;\; 0,345) \to \| x_{(2)} - x_{(1)} \|_\infty = (0,357\,;\, 0.304\,;\, 0.845) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(3)} = (1.061\,;\; 1,149\,;\; 0,634) \to \| x_{(3)} - x_{(2)} \|_\infty = (0,439\,;\, 0.345\,;\, 0,289) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(4)} = (0.945\,;\; 1,056\,;\; 0,399) \to \| x_{(4)} - x_{(3)} \|_\infty = (0.116\,;\, 0.093\,;\, 0,235) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(5)} = (1.066\,;\; 0,954\,;\; 0,306) \to \| x_{(5)} - x_{(4)} \|_\infty = (0,121\,;\, 0,102\,;\, 0.093) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(6)} = (1,104\,;\; 0,976\,;\; 0,37) \to \| x_{(6)} - x_{(5)} \|_\infty = (0,038\,;\, 0.022\,;\, 0.064) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(7)} = (1,071\,;\; 1,007\,;\; 0,399) \to \| x_{(7)} - x_{(6)} \|_\infty = (0,033\,;\, 0.031\,;\, 0.029) \to \|\cdot\| > 0.03$

$x_{(8)} = (1,059\,;\; 1,001\,;\; 0,382) \to \| x_{(8)} - x_{(7)} \|_\infty = (\underset{<0.03}{0,012}\,;\, \underset{<0,03}{0.06}\,;\, \underset{<0,03}{0.017}) \to \|\cdot\| < 0,03$ ✓

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1,059 \\ x_2 &= 1,001 \\ x_3 &= 0,382 \end{aligned}}$$

s/calculadora → $x_1 = 1,0688$; $x_2 = 0,995$; $x_3 = 0,378$ ✓

Sylvine

⑥ Resuelva el sistema anterior usando el método Gauss - Seidel
Halle T_j y T_{GS}

$$\left\{ x_1^{(k)} = \frac{8 + x_2^{(k-1)} - 4x_3^{(k-1)}}{7} ; \quad x_2^{(k)} = \frac{4 + 3x_1^{(k)} + 2x_3^{(k-1)}}{8} ; \quad x_3^{(k)} = \frac{-3 + 4x_1^{(k)} + x_2^{(k)}}{6} \right.$$

$$X_{(0)} = (0 \; ; \; 0 \; ; \; 0)$$

$$X_{(1)} = (1{,}14286 \; ; \; 0{,}92857 \; ; \; 0{,}416667) \rightarrow \| X_{(0)} - X_{(1)} \|_\infty = 1{,}14$$

$$X_{(2)} = (1{,}0374 \; ; \; 0{,}993197 \; ; \; 0{,}357142) \rightarrow \| X_{(1)} - X_{(2)} \|_\infty = 0{,}105$$

$$X_{(3)} = (1{,}08066 \; ; \; 0{,}99453353 \; ; \; 0{,}3861962) \rightarrow \| X_{(2)} - X_{(3)} \|_\infty = 0{,}04$$

$$\boxed{X_{(4)} = (1{,}064249 \; ; \; 0{,}995643 \; ; \; 0{,}3754403)} \rightarrow \| X_{(3)} - X_{(2)} \|_\infty = 0{,}016$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = D - L - U$$

$$AX = B \rightarrow (D - L - U)X = B \rightarrow DX = (L+U)X + B$$

$$\rightarrow D^{-1}DX = D^{-1}(L+U)X + D^{-1}B$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \qquad X = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{T_j} X + D^{-1}B$$

$$L+U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & -4/7 \\ 3/8 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}} \; / \; \boxed{T_j}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1} U$$

$$(D-L) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 3/56 & -1/8 & 0 \\ 5/48 & -1/48 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & -4/7 \\ 0 & 3/56 & 1/28 \\ 0 & 5/48 & -3/8 \end{pmatrix}} \checkmark$$

⑦ Sea el SEL: $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

a) Indique si los métodos iterativos convergen. Justifique.

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal dominante → convergerá.

b) Realice cinco iteraciones por el método de Gauss-Seidel con $F(4,10,34,56)$ y redondeo simétrico partiendo de $X_{(0)} = (0,0)$

$F(t, B, m, M)$ en donde: $t = \#$ dígitos, B = base del sistema, m = cota inf. del error, M = " sup del error

$F(4,10,34,56)$ → redondeo con 4 dígitos, base: decimal, cota inferior: 10^{-34}, cota sup: 10^{56}

Ecuaciones iterativas
$$\begin{cases} x^{(k)} = \dfrac{1 + y^{(k-1)}}{4} \\ y^{(k)} = \dfrac{2 - x^{(k)}}{3} \end{cases}$$

	$\|X^{k} - X^{k-1}\|_\infty$
$X^{(0)} = (0 \,;\, 0)$	
$X^{(1)} = (0{,}25 \,;\, 0{,}5833)$	0,58333
$X^{(2)} = (0{,}3958 \,;\, 0{,}5347)$	0,14583
$X^{(3)} = (0{,}3837 \,;\, 0{,}5388)$	0,01215
$X^{(4)} = (0{,}3847 \,;\, 0{,}5384)$	0,00101
$X^{(5)} = (0{,}3846 \,;\, 0{,}5385)$	0,00008

c) Idem b) pero partiendo de $X^0 = (9,5)$. Compare

	$\|X^1 - X^0\|_\infty$
$X^0 = (9 \,;\, 5)$	
$X^1 = (1{,}5 \,;\, 0{,}1667)$	7,5
$X^2 = (0{,}2917 \,;\, 0{,}5694)$	1,20833
$X^3 = (0{,}384 \,;\, 0{,}5359)$	0,10069
$X^4 = (0{,}3847 \,;\, 0{,}5387)$	0,00839
$X^5 = (0{,}3846 \,;\, 0{,}5384)$	0,0007

⑧ Sea el sistema de ecuaciones lineales: $A.X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$$

a) ¿Los métodos iterativos convergen? Justifique

A es una matriz diagonal dominante $\rightarrow$ convergen.

b) Resuelva por el método de Jacobi partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y haciendo seis iteraciones

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + 6y = 21 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \text{ecuaciones iterativas} \begin{cases} x^{(k)} = \dfrac{8 - y^{(k-1)}}{2} \\ y^{(k)} = \dfrac{7 - x^{(k-1)}}{2} \end{cases}$$

$X^0 = (1 \; ; \; 4)$

$X^1 = (2 \; ; \; 3)$

$X^2 = (2{,}5 \; ; \; 2{,}5)$

$X^3 = (2{,}75 \; ; \; 2{,}25)$

$X^4 = (2{,}875 \; ; \; 2{,}125)$

$X^5 = (2{,}9375 \; ; \; 2{,}0625)$

$X^6 = (2{,}9688 \; ; \; 2{,}0313)$

c) Resuelva por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y haciendo seis iteraciones

ec. iterativas: $\begin{cases} x^{(k)} = \dfrac{8 - y^{(k-1)}}{2} \\ y^{(k)} = \dfrac{7 - x^{(k)}}{2} \end{cases}$

$X^0 = (1 \; ; \; 4)$

$X^1 = (2 \; ; \; 2{,}5)$

$X^2 = (2{,}75 \; ; \; 2{,}125)$

$X^3 = (2{,}9375 \; ; \; 2{,}0313)$

$X^4 = (2{,}9844 \; ; \; 2{,}0078)$

$X^5 = (2{,}9961 \; ; \; 2{,}0020)$

$X^6 = (2{,}9990 \; ; \; 2{,}0005)$

d) Compare la velocidad de convergencia de ambos, sabiendo que la solución exacta es $(3, 2)$

Con el método Gauss-Seidel es el doble de rápido. En seis iteraciones se logró mayor precisión.

Mat. Sup.

Sist. Ec. Lineales.

(9) Aplique el método iterativo de Gauss - Seidel para encontrar una solución aproximada de los sig. sistemas, iterando hasta que cumpla con $\| x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} \|_\infty < 0,1 \times 10^{-2} = 0,001$

a) $\begin{cases} -x_2 + 6x_3 = -40 \\ 8x_1 - 5x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 8 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ No es matriz diagonal dominante

(así no converge)

$\begin{cases} 8x_1 - 5x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 + 6x_3 = -40 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ Así es diag. dominante $\rightarrow$ converge.

ec. iterativas $\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{16 + 5x_3^{(k-1)}}{8} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{-x_1^{k}}{3} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{-40 + x_2^{(k)}}{6} \end{cases}$

	$\|x_i^{r+1} - x_i^{r}\|_\infty$
$X^0 = (0 ; 0 ; 0)$	
$X^1 = (2 ; -0.6667 ; -6,77778)$	6,77778
$X^2 = (-2,28611 ; 0,74537 ; -6,54244)$	4,28611
$X^3 = (-2,08903 ; 0,69634 ; -6,55061)$	0,19708
$X^4 = (-2,09413 ; 0,69804 ; -6,55033)$	0,0051
$\boxed{X^5 = (-2,09396 ; 0,69799 ; -6,55034)}$	0,00017

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 5 \\ 5x_4 = 2,5 \rightarrow \boxed{x_4 = 0.5} \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4,5 \\ 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 5 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

es diag. dominante ✓

$\left\{ x_1^{k} = \dfrac{4,5 - x_2^{k-1}}{3} \right.$; $x_2^{k} = \dfrac{-2 + x_3^{k-1}}{3}$; $x_3^{k} = \dfrac{5 - 2x_1^{k}}{4}$

	$\|x_i^{r+1} - x_i^{r}\|_\infty$
$X^0 = (0 ; 0 ; 0)$	
$X^1 = (1,5 ; -0,6667 ; 0,5)$	1,5
$X^2 = (1,7222 ; -0,500 ; 0,3888)$	0,2222
$X^3 = (1,6667 ; -0,5370 ; 0,41667)$	0,05556
$X^4 = (1,6790 ; -0,5278 ; 0,41049)$	0,01235
$X^5 = (1,6759 ; -0,5298 ; 0,412037)$	0,00309
$\boxed{X^6 = (1,6766 ; -0,5293 ; 0,411694)}$	0,00069 $< 0,001$

Sol

c) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -3 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \equiv \begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1^k = \dfrac{9 - x_2^{k-1} - x_3^{k-1}}{6} \end{cases}$; $x_2^k = \dfrac{15 - x_1^k - 2x_3^{k-1}}{6}$; $x_3^k = \dfrac{3 + x_1^k + x_2^k}{6}$

	$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty$
$x^0 = (0 \; ; \; 0 \; ; \; 0)$	
$x^1 = (1{,}5 \; ; \; 2{,}25 \; ; \; 1{,}125)$	$\rightarrow$ 2,25
$x^2 = (0{,}9375 \; ; \; 1{,}9688 \; ; \; 0{,}984375)$	0,5625
$x^3 = (1{,}0078 \; ; \; 2{,}0039 \; ; \; 1{,}00195)$	0,0703
$x^4 = (0{,}9990 \; ; \; 1{,}9995 \; ; \; 0{,}99975)$	0,00879
$x^5 = (1{,}0001 \; ; \; 2{,}0001 \; ; \; 1{,}0000305)$	0,0011
$\boxed{x^6 = (1{,}0000 \; ; \; 2{,}0000 \; ; \; 0{,}9999962)}$	0,0001 < 0,001

(10) Aplique el método de Jacobi para resolver el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ comenzando con la apr. inicial: $(1{,}01 ; 1{,}01)$.
Halle la T_J

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Matriz diag dom ✓ $\begin{cases} x_1^k = \dfrac{4 - x_2^{k-1}}{3} \\ x_2^k = \dfrac{3 - x_1^{k-1}}{2} \end{cases}$ ecuaciones iterativas

$x^0 = (1{,}01 \; ; \; 1{,}01)$

$x^1 = (0{,}99667 \; ; \; 0{,}995)$

$x^2 = (1{,}00167 \; ; \; 1{,}00167)$

$x^3 = (0{,}99944 \; ; \; 0{,}99917)$

$x^4 = (1{,}00028 \; ; \; 1{,}00028)$

$x^5 = (0{,}99991 \; ; \; 0{,}99986)$

$x^6 = (1{,}00005 \; ; \; 1{,}00005)$

$x^7 = (0{,}99998 \; ; \; 0{,}99998)$ $\|x^7 - x^6\|_\infty = 0{,}00007 < 0{,}0001$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = T_J}$ ✓

Mat Sup.

Sist Ec. Lineales

(11) Aplique el método de Jacobi para resolver los sig. sistemas, iterando hasta que se cumpla con $\| x_i^{r+1} - x_i^r \|_\infty < 0{,}01$ y trabajando con 3 decimales a redondeo simétrico.

a) $\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}02x_3 = 2 \\ 0{,}03x_1 + x_2 - 0{,}05x_3 = 3 \\ 0{,}01x_1 - 0{,}02x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1^k = 2 - 0{,}06\, x_2^{k-1} + 0{,}02\, x_3^{k-1} \\ x_2^k = 3 - 0{,}03\, x_1^{k-1} + 0{,}05\, x_3^{k-1} \\ x_3^k = 5 - 0{,}01\, x_1^{k-1} + 0{,}02\, x_2^{k-1} \end{cases}$

		$\| x_i^{r+1} - x_i^r \|_\infty$
$x^0 = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$		
$x^1 = (2\ ;\ 3\ ;\ 5)$		5
$x^2 = (1{,}92\ ;\ 3{,}190\ ;\ 5{,}04)$		0,19
$x^3 = (1{,}909\ ;\ 3{,}194\ ;\ 5{,}045)$		0,106
$\boxed{x^4 = (1{,}909\ ;\ 3{,}195\ ;\ 5{,}045)}$		0,00055

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 21 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 30 \end{cases}$

ec. iterativas $\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{10 - x_2^{k-1} - x_3^{k-1}}{3} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{21 - x_1^{k-1} - 2x_3^{k-1}}{5} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{30 - x_1^{k-1} - 2x_2^{k-1}}{5} \end{cases}$

Partiendo de $x^0 = (0, 0, 0)$ hice 14 iteraciones (con el Excel) hasta que $\varepsilon < 0{,}01$

$\boxed{x^{(13)} = (0{,}997\ ;\ 1{,}997\ ;\ 4{,}997)}$

---

(12) Sea el sistema $A \cdot X = B$ con: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 29 \\ 79 \end{pmatrix}$

a) Indique si la matriz es diagonal dominante. ¿Puede asegurarse que sea posible resolverlo por el método de Gauss-Seidel?

No es matriz diagonal dominante → no se puede asegurar que puede resolverse con el método Gauss-Seidel

b) Realice 100 iteraciones por Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ¿converge a la solución que es $(3; 2)$?

$x_1^k = \dfrac{29 - 7x_2^{k-1}}{5}$

$x_2^k = \dfrac{79 - 13x_1^k}{20}$

Lo hice con Excel y converge. en $X^{100} = (2{,}99975 ; 2{,}00016)$

c) Analice si el resultado anterior contradice o no al teorema.

No, no lo contradice.

Sylvima